

DOI:10.7522/j.issn.1000-0240.2022.0040

LIU Wenhui, XIE Changwei, LIU Hairui, et al. Application of Stefan equation on simulating freezing-thawing process of permafrost[J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2022, 44(1):327-339. [刘文惠, 谢昌卫, 刘海瑞, 等. Stefan方程在土壤冻融过程模拟中的应用[J]. 冰川冻土, 2022, 44(1):327-339.]

## Stefan方程在土壤冻融过程模拟中的应用

刘文惠<sup>1</sup>, 谢昌卫<sup>2</sup>, 刘海瑞<sup>3</sup>, 庞强强<sup>2</sup>, 王武<sup>2</sup>,  
刘广岳<sup>2</sup>, 杨雨昆<sup>1</sup>, 王铭<sup>1</sup>, 张琪<sup>1</sup>

(1. 青海大学地质工程系, 青海西宁810016; 2. 中国科学院西北生态环境资源研究院冰冻圈科学国家重点实验室 藏北高原冰冻圈特殊环境与灾害国家野外科学观测研究站, 甘肃兰州730000; 3. 青海大学生态环境工程学院, 青海西宁810016)

**摘要:** 多年冻土与大气间的相互作用主要是通过活动层中的水热动态变化过程而实现。气候变化背景下的多年冻土活动层冻融过程模拟、多年冻土厚度制图和变化预测是研究冻土区生态环境、水文、工程以及碳循环的基础。根据国内外研究进展,总结了不同修正形式的Stefan方程在多年冻土活动层冻融过程和活动层厚度模拟中的应用进展,对将Stefan方程应用到分层堆积土壤中的不同算法进行了简要介绍,并指出了其在应用过程中存在的问题。Stefan方程首次将地表(或者大气)温度的变化与冰层(或者土层)的冻结融化过程以简单公式的形式联系起来,极大地简化了土壤冻结融化过程的分析计算。由于其输入参数少、形式简单、模拟效果可靠,成为常用模拟土壤冻融过程的方法之一,将其耦合到气候模型、陆面模型和水文模型中的研究也越来越多。Stefan方程最初在研究北极地区湖冰形成过程时提出,在应用到冻土学中后,不同学者在考虑土壤含水量、不同下垫面地气温差、地形和降水等因素后对方程进行了改进,并有多种算法试图将这一方程应用到非均质土壤中,取得了较好的模拟效果。但是,Stefan方程在国内的应用更多地用于简单模拟均质土壤多年冻土活动层厚度的空间分布状况,其应用到非均质土壤中的研究却较少。因此,未来需更深入研究Stefan方程模拟分层土壤的冻融过程,为准确掌握多年冻土对气候变化的响应研究提供最基本的方法。

**关键词:** Stefan方程; 冻融过程; 活动层厚度; 含水量

**中图分类号:** P642.14 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-0240(2022)01-0327-13

### 0 引言

多年冻土是指温度在0℃或低于0℃至少连续存在两年的岩土层<sup>[1]</sup>。多年冻土是冰冻圈的重要组成部分,其影响能量交换、水文过程和生态环境,进而影响全球气候系统。活动层是指覆盖于多年冻土之上的夏季融化冬季冻结的土层<sup>[1]</sup>。活动层的水热动态变化过程影响着冻土区水文和生态系统的生物、物理及地球化学过程。多年冻土与大气圈之间的相互作用主要是通过活动层中的水、热动态变化过程而实现的。多年冻土和活动层研究很早就

受到了国内外学者的广泛关注,并加大了这方面的观测和研究力度。多年冻土与活动层被世界气候研究计划(World Climate Research Programme, WCRP)列入“气候与冰冻圈计划”(Climate and Cryosphere, CliC)的主要观测研究内容之一。由国际冻土协会和加拿大地质调查局联合发起的全球多年冻土监测网络(Global Terrestrial Network for Permafrost, GTN-P)用于监测全球多年冻土地温。环北极活动层监测网络(Circumpolar Active Layer Monitoring Network, CALM)旨在对活动层厚度和热状况进行监测。活动层作为多年冻土与大气圈

收稿日期: 2020-12-11; 修订日期: 2021-03-27

基金项目: 青海大学青年科研基金项目(2020-QGY-10); 青海省青年科学基金项目(2021-ZJ-940Q); 美丽中国生态文明建设科技工程专项(XDA23060703); 国家自然科学基金项目(41671068)资助

作者简介: 刘文惠, 讲师, 主要从事多年冻土与气候变化研究. E-mail: liuwenhui222@126.com

通信作者: 谢昌卫, 研究员, 主要从事寒区环境与寒区水文研究. E-mail: xiecw@lzb.ac.cn

进行热、质交换的最主要场所和媒介。活动层厚度又是判断多年冻土退化最为直观的标志,其可以更好地反映多年冻土对气候变化的响应状况。随着全球变暖加剧,多年冻土退化严重<sup>[2-9]</sup>,尤其是活动层厚度增厚尤为明显<sup>[4-6]</sup>。因此,气候变化背景下的活动层冻融过程模拟、厚度制图和变化预测是研究冻土区生态环境、水文、工程以及碳循环的基础,也是目前冻土学领域的研究热点。活动层厚度可以通过钻探、坑探等方法直接测量,也可用测温法、地球物理勘探等间接方法来估计。但是,由于监测条件的限制和监测数据的有限,实地监测很难满足活动层厚度空间分布的模拟需要,大尺度活动层厚度空间分布以及长时间序列活动层对气候变化的响应还是得依靠模型来解决。

用于模拟活动层冻融过程和厚度的模型较多,主要分为两大类:经验半经验公式和以求解热传导方程为基础的数学物理方法<sup>[10-11]</sup>。由于数学物理方法的初始边界条件在时空上变化较大,因此,常用于计算单点的冻结融化深度。对于空间上高度非均匀的冻土空间的变化,经验和半经验型公式是一个较为实际的选择,尤其是半经验半理论的计算方案,既充分考虑了冻土的物理特性和过程,又可以用大尺度参量获取冻土在水平和垂直空间的变化,更适宜于冻土的实际研究<sup>[11]</sup>。目前,Stefan 方程是国内外用于计算多年冻土冻结和融化深度最常用的经验公式。它充分考虑了气候条件、土壤热属性和水分条件,形式简单,驱动参数少,模拟效果较好,既可以用于模拟单点的冻结融化深度,也可以较方便地模拟大尺度的活动层厚度空间分布。本文就不同修正形式的 Stefan 方程在国内外多年冻土活动层冻融过程模拟中的研究进展和应用中存在的问题进行了探讨,旨在为今后的研究提供参考。

## 1 Stefan 方程介绍

斯蒂芬方程是奥地利科学家 Josef Stefan 在研究北极地区湖冰形成过程时提出的<sup>[12]</sup>。假设冰体内热量传导非常迅速,并且冰体内的温度变化是线性的。当冰的表面温度低于相变温度时,冰体下部与湖水接触面处的温度则等于相变温度。在一个给定的时间内,冰体从下面湖水中得到的热量和其从表面排出的热量是相等的,这一关系可以表达为:

$$k \frac{dT}{dz} = L \frac{d\xi}{dt} \quad (1)$$

由此得出冰体厚度随时间的公式:

$$\xi = \sqrt{\frac{2k(T_s - T_f)t}{L}} = \sqrt{\frac{2kI}{L}} \quad (2)$$

事实上,式(1)仅可以描述冰体内简化的热传导过程,对于常规的热传导过程,通常用一维傅力叶热传导方程描述。在给定的边界条件和假设下,Nemman 和 Stefan 先后给出了这一非齐次二阶微分方程的解。当假设冻结体内温度梯度为线性的条件下,Stefan 解仍然可以简化成式(2)的形式。因此,一般认为 Stefan 方程是一维热传导方程 Stefan 解简化后的公式表达。

Stefan 方程提出后的数十年里面,一般用于计算湖冰、海冰等冰体的厚度。1943年,Berggren<sup>[13]</sup>对式(2)中纯冰体的热容用土壤中冰体的热容代替,将 Stefan 方程应用到浅层土层冻结和融化过程的计算中。在理论上,冰-水相变伴随的潜热释放或者吸收要远大于干土本身热容的变化,因此,当土层含水量较大时,将 Stefan 方程应用到土壤中与应用到冰体内造成的差别并不大。由此,式(1)转化为式(3),即为广泛应用于冻土学中的 Stefan 方程的通用形式<sup>[14]</sup>。

$$Z = \sqrt{\frac{2K \cdot DDF/DDT}{Q_L}} = \sqrt{\frac{2K \cdot DDF/DDT}{L\rho(\omega - \omega_u)}}$$

$$DDF = \sum_{i=0}^t (T_0 - T_i), \quad T_i < T_0, \quad DDT = \sum_{i=0}^t (T_i - T_0), \quad T_i > T_0 \quad (3)$$

式中:  $Z$  为冻结/融化深度(m);  $K$  为导热系数( $W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$ );  $Q_L$  为土壤水分相变引起的潜热变化,  $Q_L = L\rho(\omega - \omega_u)$ ,  $L$  为冰的融化潜热( $3.3 \times 10^5 J \cdot kg^{-1}$ );  $\rho$  为土壤的干容重( $kg \cdot m^{-3}$ );  $\omega$  为总的含水量(%);  $\omega_u$  为未冻水含量(%);  $DDF$  和  $DDT$  分别为冻结指数和融化指数( $^\circ C \cdot d$ ),指地表温度日均值连续低于  $0^\circ C$  的温度累计之和和地表温度日均值连续高于  $0^\circ C$  的温度累计之和;  $T_i$  为日平均地表温度( $^\circ C$ );  $T_0 = 0$ 。

Stefan 方程首次将地表(或者大气)温度的变化与冰层(或者土层)的冻结融化过程以简单公式的形式联系起来,极大地简化了土壤冻结融化深度的分析计算过程。因此,Stefan 方程在推出后被广泛运用到寒冷地区的工程建设中,并逐渐被应用到冰川消融、冻土变化研究中<sup>[15-18]</sup>。目前,在多年冻土活动层冻融过程的研究中,Stefan 方程仍然是应用最广泛的模拟计算方法。

## 2 Stefan 方程在多年冻土中的应用

### 2.1 在均质土壤中的应用

#### 2.1.1 引入 $N$ 因子

Stefan 方程最初被运用到土层冻融过程时,为

了避免因未考虑外部热量交换因素引起的误差,建议采用地表以下 5~10 cm 的日平均温度作为温度驱动<sup>[19]</sup>。由于日尺度该深度的日平均温度获取困难,一般用日平均地表温度计算冻结-融化指数。相比地表温度或者一定深度内土层温度,气温更容易观测,实际应用中则大多采用气温来计算计算冻结-融化指数。这在一定程度上造成了额外的计算误差。针对这种状况,Carlson<sup>[20]</sup>最早提出  $N$  因子,对 Stefan 方程做了进一步的修正:

$$N_t = \frac{DDT_s}{DDT_a} = \frac{\int_0^{\theta_s} (T_s - T_f) dt}{\int_0^{\theta_a} (T_a - T_f) dt} \approx \frac{\sum_0^{\theta_s} \bar{T}_s}{\sum_0^{\theta_a} \bar{T}_a}$$

$$N_f = \frac{DDF_s}{DDF_a} = \frac{\int_0^{\theta_s} (T_s - T_f) dt}{\int_0^{\theta_a} (T_a - T_f) dt} \approx \frac{\sum_0^{\theta_s} \bar{T}_s}{\sum_0^{\theta_a} \bar{T}_a}$$

$$Z = \sqrt{(2k_i(N_t DDT_a)) / (L\rho(\omega - \omega_u))} \quad (4)$$

式中: $N_t$ 为融化  $N$  因子,是地面融化指数与气温融化指数之比; $N_f$ 为冻结  $N$  因子,是地面冻结指数与气温冻结指数之比。从概念上讲, $N$  因子用一个简单的数值代表了特定下垫面地表能量通量的总和。一般情况下,融化  $N$  因子大于冻结  $N$  因子。不同下垫面类型的  $N$  因子不相同,但是,同一区域相同地表条件的  $N$  因子相差不大,基本可以取固定值。从表 1 的统计结果可以发现,青藏高原的融化  $N$  因子和冻结  $N$  因子普遍大于达拉斯加和加拿大等高纬度地区的融化  $N$  因子和冻结  $N$  因子;土壤颗粒越粗,融化  $N$  因子越大。裸地融化  $N$  因子最大(>1.28),其次是灌丛和苔原,河道和沼泽的融化  $N$  因子最小(<0.7)<sup>[31]</sup>。北极地区的  $N$  因子值比较稳定,其年变化幅度小于 10%<sup>[32]</sup>。山地多年冻土区的  $N$  因子值年际变化比较大,尤其是冬季随着积雪的年变化而变化较大<sup>[33]</sup>。

引入  $N$  因子后的 Stefan 方程被广泛用于更复杂地形和下垫面的大尺度活动层厚度空间分布及变化预测模拟。庞强强等<sup>[34]</sup>模拟了青藏高原多年冻土活动层厚度的空间分布状况。徐晓明等<sup>[35]</sup>得到青藏高原多年冻土活动层厚度平均为 2.39 m,活动层厚度在羌塘盆地最小,在多年冻土区边缘、祁连山、西昆仑山、念青唐古拉山较大。气候变化条件下,活动层厚度呈整体增大趋势,1981—2010 年,活动层厚度的变化量为 -1.54 ~ 2.24 m,变化率为

-5.90 ~ 10.13 cm·a<sup>-1</sup>,平均每年变化 1.29 cm。张中琼等<sup>[36]</sup>模拟了青藏高原活动层厚度空间分布状况并预测了未来不同气候情景下活动层厚度的变化情况。到 2050 年,A1B 情景下活动层厚度最大达 10.20 m,增加约 0.30~0.80 m;B1 情景下增加 0.20~0.50 m;A2 情景下增加 0.20~0.55 m。Klene 等<sup>[37]</sup>完成了库帕河流域活动层厚度的空间分布制图,Shur 等<sup>[32]</sup>完成了俄罗斯多年冻土分布制图,张廷军等<sup>[38]</sup>模拟得到俄罗斯北极地区鄂毕河、叶尼塞河和勒拿河流域平均活动层厚度分别为 1.80 m、1.70 m 和 1.66 m。

引入  $N$  因子后的 Stefan 方程的模拟精度也得到大大提高。Klene 等<sup>[37]</sup>进行库帕河流域活动层厚度空间分布制图时用地表温度作为温度驱动得到的模拟误差为 14.5%,用 3 年的平均  $N$  因子和气温得到的误差为 17.6%,用气温得到的误差为 29.2%。同时,根据不同温度驱动估算马街山 2010 年的活动层厚度,结果显示用地表温度作为温度驱动得到的活动层厚度为 1.13 m,相对误差最小(4%),最接近实测值;用气温得到的活动层厚度为 1.01 m,相对误差最大(13.6%),明显偏小;而用气温和  $N$  因子得到的活动层厚度为 1.16 m,偏大,但是误差要远远小于只用气温驱动得到的结果。地面温度是土壤通过地面与大气间热交换特征的综合指标,比气温更能体现冻土的热状况。而且,地表温度对外界条件反应更为迅速,能较为准确地反映冻土的上边界热状况,是众多冻土模型最佳的选择。因此,在完成大尺度活动层厚度空间分布模拟时,当地表温度缺失的情况下,为了尽可能减小模拟误差,可以考虑用  $N$  因子和气温作为温度驱动。

### 2.1.2 引入 $E$ 值

Harlan 和 Nixon 认为 Stefan 方程可以表示为土壤特征与融化指数之间的线性函数<sup>[39]</sup>:

$$Z = E \sqrt{DDT_a}, E = \sqrt{\frac{2K_i N_t}{\rho(\omega - \omega_u)} L} \quad (5)$$

式中: $E$ 为与土壤热参数、含水量和地表覆盖类型有关的比例参数,表示活动层的融化速率。已知任意点的实测活动层厚度和融化指数,可以得到  $E$  值。已知  $E$  值和其他土壤参数的情况下,便可得到其中的任一土壤热参数。Hinkel 等<sup>[40]</sup>得到阿拉斯加北部森林多年冻土区 1992 年和 1993 年的“ $E$ ”值分别为 1.22 和 1.21。假定土壤孔隙度分别为 0.5 和 0.6 时,得到导热系数分别为 0.126 和 0.151 W·m<sup>-1</sup>·°C<sup>-1</sup>。

表1 融化 $N$ 因子( $N_t$ )和冻结 $N$ 因子( $N_f$ )值统计结果  
Table 1 The thawing  $N$ -factors ( $N_t$ ) and freezing  $N$ -factors( $N_f$ )

地点	地表条件	$N_t$	$N_f$	文献来源
青海热水地区	草炭亚黏土	1.61	0.84	李述训等 <sup>[21]</sup>
	天然草地	1.85	0.81	
	碎石亚黏土	1.99	0.82	
	砂砾石	2.26	0.79	
北麓河地区	高寒草原	2.06	0.58	蒋观利等 <sup>[22]</sup>
	高寒沼泽草甸	1.47	0.55	
	高寒草甸	1.27	0.54	
青藏铁路沿线的气象站	格尔木	1.41	1.11	赵红岩等 <sup>[23]</sup>
	五道梁	2.75	0.73	
	沱沱河	2.24	0.78	
	安多	2.15	0.76	
	那区	1.94	0.73	
木里、热水地区	当雄	1.81	0.65	吴青柏 <sup>[24]</sup>
	天然草皮	1.89	0.79	
	3 m高路堤	1.98	0.81	
	砂砾表面	2.26	0.77	
	3 m高路堤表面草皮	1.80	0.91	
	碎石亚黏土	2.00	0.85	
	草炭亚黏土	1.60	0.83	
阿拉斯加	裸露地表	2.55	0.74	Carlson <sup>[20]</sup>
	植被	2.30	0.68	
	泥炭层上面是云杉、苔藓	0.37	0.29	
阿拉斯加库帕河流域的热通量观测点	泥炭层上面只有苔藓	0.73	0.25	Klene等 <sup>[25-27]</sup>
	只有泥炭层	1.22	0.33	
	荒地	1.25	—	
	灌木	0.97	—	
北极和亚北极地区	水道	0.73	0.32	District <sup>[28]</sup>
	草丛沼泽	0.90	0.30	
	积雪	—	1.00	
加拿大Takhini河谷	草皮、泥碳	1.00	0.50	Burn <sup>[29]</sup>
	沼泽	0.90	0.30	
加拿大Mackenzie河谷	火烧遗迹	0.55	0.22	Taylor <sup>[30]</sup>
	森林	0.50	0.35	
加拿大Mackenzie河谷	冲积阶地上是有机质和淤泥	0.64	0.30	Taylor <sup>[30]</sup>
	沼泽	0.26	0.29	

已知 $E$ 值和融化指数就可以得到活动层厚度的空间分布状况。Peng等<sup>[41]</sup>得到黑河流域的 $E$ 值范围为0.028~0.053,其中砂砾石 $E$ 值最大,裸岩次之,荒漠的最小。并结合气温得到黑河流域2000—2008的年平均冻结深度的空间分布范围为1.0~3.5 m。Shiklomanov等<sup>[42-43]</sup>成了阿拉斯加库帕河1987—1999年的年平均活动层厚度高精度制图(50 m分辨率),并发现在年变化尺度上,活动层厚度与融化指数具有高度一致性。1989年和1998年的融化指数最大,对应最大的活动层厚度,1991年和1996年的融化指数最小,对应最小的活动层厚

度。Brown等<sup>[44]</sup>和Hinkel等<sup>[45]</sup>基于极地活动层监测数据和气温融化指数做拟合分析得到,活动层厚度与融化指数具有很好的对应关系,阿拉斯加、加拿大北部、北欧地区和俄罗斯地区的一些监测点均显示活动层厚度在1998年达到最大值(对应最大融化指数),在2000年达到最小值(对应最小融化指数)。

### 2.1.3 加入降雨、地形因子

山地多年冻土的形成和发展与局地微气候和微地形(坡度和坡向)有很大的密切关系。基于此,一些学者在上式中加入了降雨和地形因子。Hinkel等<sup>[40]</sup>将阿拉斯加北方森林多年冻土区的实测活动

层厚度和融化指数做最小二乘回归拟合后得到 Stefan 方程的另一个形式:

$$Z = E \sqrt{DDT_a} + \alpha \quad (6)$$

认为  $\alpha$  项表示为降雨对活动层厚度的影响。暖季一天内不同时刻的降雨对活动层会产生不同的影响效果。日出前后,气温很低,此时形成的降水雨水温度较低(可称之为冷降雨事件),而形成于午后气温相对较高时的降水温度较高,可称之为暖降雨事件。其中,暖降雨雨水温度高,降落地面后会带入大量感热进入深层土壤,从而加速了活动层融化速率,使得活动层厚度增厚。但是,这个研究结果只限于阿拉斯加森林环境下泥炭层较厚的多年冻土区,其他地区没有尝试过。Shiklomanov 等<sup>[42]</sup>完成库帕河流域活动层厚度高精度制图时用降水代替含水量(该区域蒸发很小,假定降水全部用于下渗)发现活动层融化速率与前一年融化期末的降水有很大的相关性,1996年融化期末降水最少,对应1997年的活动层融化速率最大。

Nelson 等<sup>[46]</sup>在上式中加入了地形因素,完成了阿拉斯加库帕河流域更详尽的活动层厚度分布制图(1 km 分辨率),得到北坡(阴面)的活动层厚度在减小(负值),南坡(阳面)的活动层厚度在增大。

$$Z = E \sqrt{r \cdot DDT_a} + \alpha, \quad r = R_s/R_h \quad (7)$$

式中: $r$ 为地形因子引起的辐射因素,是个无量纲参数; $R_s$ 为斜坡上的潜在太阳辐射,与纬度、坡度和坡向相关; $R_h$ 为水平面上的潜在太阳辐射。

## 2.2 分层土壤中的应用

土壤不同于冰体那样是由均质成分构成,在不同深度岩土成分、结构以及水分条件等通常有较大的差异。将本来用于计算均质冰体冻融深度的 Stefan 方程应用到非均质的岩土中,必然会引起一定的计算误差。因此,不同时期的不同学者提出了一些将 Stefan 方程用于计算分层堆积土壤冻融深度的算法,如被广泛应用的 J-L 算法<sup>[47-49]</sup>、N-M 算法<sup>[50]</sup>、分层总和法<sup>[51]</sup>和 X-G 算法<sup>[52]</sup>。

### 2.2.1 J-L 算法

J-L 算法(也被称为 St Paul 方程)由 Jumikis 和 Lunardini 自 1950 年代提出,在工程计算中得到了广泛的应用,并被应用到许多大型的数学模型中。原理是通过计算冻融到第  $n$  层所需要的冻融指数来得到最大冻融深度,其推导过程见参考文献<sup>[47-48]</sup>。Woo 等<sup>[53-54]</sup>利用 J-L 算法模拟了加拿大西北部马更些河流域的活动层厚度并分析了有机质层的影响。

当泥炭层厚度为 0.2 m 时,A2 情景下,苔原活动层厚度由 0.68 m 增大到 2100 年的 0.96 m;森林活动层由 1.35 m 增大到 2100 年的 1.92 m。当泥炭层厚度增厚到 1 m 时,A2 情境下苔原的活动层厚度由 0.39 m 增大到 2100 年的 0.50 m;森林活动层由 0.65 m 增大到 2100 年的 0.75 m。同时,分析了土壤质地、含水量和温度等对该区域不连续多年冻土活动层厚度的影响<sup>[55]</sup>。Woo 等<sup>[56]</sup>于 2004 将 J-L 算法做了改进后用于模拟双向的冻结融化过程,得到北美自北向南多年冻土区到季节冻土区 6 种下垫面的冻结融化过程。对比单向的冻结融化过程,双向的冻结融化过程大大提高了模拟精度,误差范围为 0.16~0.58,而单向模拟的结果误差高达 0.53~1.34。

### 2.2.2 分层总和法

分层总和法是通过分别计算冻融时各层土所消耗的冻融指数得到各层的冻结深度,最后各层的冻融深度之和为最大冻融深度。其推导过程见参考文献<sup>[51]</sup>。分层总和法的研究较少,应用没有得到推广。

Stefan 方程通用形式[式(3)]可以改写成如下形式:

$$F = \frac{L \cdot \omega \cdot \rho}{2k} \cdot Z^2 \quad (8)$$

从式(8)中可以看出,冻融指数可以看成是冻融深度的幂函数,即冻融指数与冻融深度的平方成正比,对于厚度为  $z = z_1 + z_2$  的均质土壤,如下关系式成立:

$$F = \frac{L \cdot \omega \cdot \rho}{2k} \cdot z^2 = \frac{L \cdot \omega \cdot \rho}{2k} \cdot (z_1 + z_2)^2 = \frac{L \cdot \omega \cdot \rho}{2k} \cdot z_1^2 + \frac{L \cdot \omega \cdot \rho}{k} \cdot z_1 \cdot z_2 + \frac{L \cdot \omega \cdot \rho}{2k} \cdot z_2^2 \geq \frac{L \cdot \omega \cdot \rho}{2k} \cdot z_1^2 + \frac{L \cdot \omega \cdot \rho}{2k} \cdot z_2^2 \quad (9)$$

从式(9)可以看出,即使对均质土壤,要冻结/融化厚度为  $z$  的土壤,其所需要消耗的冻结/融化指数要大于分别冻结/融化厚度为  $z_1$  和  $z_2$  的土壤所需要的冻融指数之和,因此,简单地利用分层总和法估算非均质土壤冻结/融化深度是错误的。

### 2.2.3 X-G 算法

2013 年 Xie 等<sup>[52]</sup>利用类比递推的方法,提出了基于 Stefan 方程计算分层土壤冻融深度的简易算法(X-G 算法)。X-G 算法能够计算由任意多层不同厚度的土层组成的土壤的冻融过程,是目前唯一能将斯蒂芬方程运用到非均质土壤冻融过程的算法。它基于不同土层的物理参数将斯蒂芬方程应用到

估算任意多层、任意厚度的土壤冻结/融化深度,而不是将不同层土壤参数进行平均处理,这样避免了不必要的计算误差。X-G算法原理简单,既可模拟单向冻结过程也可模拟双向冻结过程,目前在模拟国内多年冻土冻融过程方面取得了较好的进展。Xie等<sup>[52]</sup>模拟得到马衔山、两道河、昆山垭口和西大滩的活动层厚度分别为1.12 m、1.23 m、1.72 m和1.86 m,与实测值的相对误差范围为4.2%~17%。刘文惠等<sup>[57]</sup>利用该算法模拟了马衔山2010—2013年的活动层厚度,模拟值分别为1.06 m、0.99 m、1.16 m和1.04 m,与实测值很接近,相对误差范围为1%~9%。

X-G算法发表以后,在相关领域受到了广泛的关注,Kurylyk<sup>[58]</sup>认为X-G算法在数学上是合理的,但不能很好解释土壤冻融过程中温度变化的过程,并认为N-M算法能更好地将Stefan方程应用到分层堆积的土壤。从非线性傅里叶热传导方程的斯蒂芬解入手,对Stefan方程基本原理、X-G算法、J-L算法和N-M算法推导过程等进行了如下详细分析<sup>[59]</sup>:

分层堆积的土壤中冻结融化深度作为时间的分段函数,其函数形式为:

$$\xi = \begin{cases} m_1 \sqrt{t_1} = \xi_1 & \xi \leq Z_1 \\ Z_1 + m_2 \sqrt{t_2} = Z_1 + \xi_2 & Z_1 < \xi < Z_1 + Z_2 \\ \dots & \dots \\ Z_n + m_n \sqrt{t_{n+1}} = Z_n + \xi_{n+1} & Z_n < \xi < Z_n + Z_{n+1} \end{cases} \quad (10)$$

系数 $m$ 是土壤物理性质参数的函数。对上式求导数,得到:

$$d\xi = \begin{cases} d\xi_1 & \xi \leq Z_1 \\ d\xi_2 & Z_1 < \xi < Z_1 + Z_2 \\ \dots & \dots \\ d\xi_{n+1} & Z_n < \xi < Z_n + Z_{n+1} \end{cases} \quad (11)$$

可见其导数形式也是不连续的。分层堆积土壤中的冻融过程是时间的分段函数,并不是连续函数,从而最终证明基于连续函数推导得到,即建立在连续微分形式上的J-L算法和N-M算法是错误的,X-G算法是目前唯一能将斯蒂芬方程运用到分层堆积土壤的算法。

### 3 与陆面和水文模型的耦合

目前的陆面过程模型和水文模型的研究对均匀、覆盖稠密的下垫面条件研究比较成熟,且较多,但忽略了冻土和积雪等复杂因素或仅做了十分简单的概化。考虑各圈层相互作用,发展多圈层综合

陆面过程面模型和水文模型成为一种必要。多年冻土对地气之间能量交换、水循环有很重要的影响,活动层冻融过程的准确模拟可以很好地研究多年冻土区地-气-能-水的交换过程。因此,在陆面过程面模型和水文模型中耦合冻土模型,反映气候变化背景下土壤冻融过程中水热过程迁移等对陆地-大气水热交换过程和寒区环境水文过程的影响是目前大气和水文学者的关注重点。许多研究者也在陆面过程模型框架下发展了冻土参数化方案,发现在陆面水文过程模型中考虑冻土作用能显著地增强模型模拟能力<sup>[60-63]</sup>。不少研究人员尝试在分布式水文模型中添加冻土过程,以适应寒区环境水文过程模拟。研究表明,包含冻土冻融模块的模型能够成功模拟由冻土融化引起的春季洪水过程,而运用不具备冻土模拟功能的分布水文模型在冻土明显的寒区流域进行模拟时,不能准确捕捉融雪径流过程,由于缺失冻土模块而严重低估融雪期间的径流洪峰,但暖期径流量又明显偏高<sup>[64-67]</sup>。

Stefan方程由于其原理简单、计算简便、所需要参数易于获得,在一些陆面过程和水文模型中得到应用。多年冻土与气候模式的耦合有两种方法,一种是将冻结融化过程融合到气候模式中;一种是基于气候模式的温度数据作为冻结融化过程的温度驱动,这种方法目前应用较多,比较成熟。Stendel等<sup>[68]</sup>基于OAGCMs(ocean-atmosphere general circulation models)和Stefan方程得到当前气候条件下(1961—1990年)北半球多年冻土活动层厚度范围为0~1.2 m;IPCCA2情景模式下2071—2100年活动层厚度将增加1.1~1.6倍,其中俄罗斯北极地区活动层厚度将增加30%~40%,增加幅度最大的是西伯利亚东北部和加拿大西部,其次是中国和蒙古北部。Li等<sup>[69]</sup>将Stefan方程的常用表达式耦合到陆面模式SiB2中发现,加入冻土参数化后的模拟精度大大提高,模拟结果误差不到9%。其中,模拟得到的表层和底部土壤湿度的绝对误差分别为0.020和0.013,远远小于没有加入冻土参数化的模拟结果。Yi等<sup>[70]</sup>考虑泥炭层、未冻水和冠层储热后将双向的J-L算法耦合到陆面模式CLM3中,对比没有加入J-L算法的模拟结果,改进后的CLM3消除了冻结融化锋面在3、4月份的较大波动以及在1月和3月出现稽延期后较大的跳跃下降现象;并且在模拟土壤温度、土壤含水量和雪深方面的精度大大提高。Fox<sup>[71]</sup>将J-L算法融合到水文模型中去,基于土壤水热相互作用,分析

了冻结融化过程对土壤水量平衡要素的影响,并通过敏感性实验分析得出冻融过程对土壤径流变化和预测极端径流事件具有重要的潜在影响。与最新版本的大尺度寒区水文模型(cold region hydrological model, CRHM)冻土模块相比,尽管耦合 Stefan 方程后的水文模型在描述冻土活动层冻融过程对水文过程的影响方面有较大优势,但不能准确描述冻土融水过程、水分迁移入渗过程、冻土坡面汇流以及产汇流过程等,更不能量化地表径流和壤中流的量及冻土融水对径流的贡献值。

## 4 存在的问题

### 4.1 模拟误差分析及可能的原因

土壤中的冻融过程是非常复杂的,许多因素起

着关键的影响作用。Stefan 方程以一维热传导方程为理论基础,假设地面吸收的热量全部用于多年冻土的融化且温度变化是线性得出的,这显然与实际冻融过程不一致。因此,利用 Stefan 方程模拟得到的冻结融化深度与实际冻融深度之间通常有或大或小的误差。一般认为,Stefan 方程忽略了感热变化,没有考虑外部热量交换和冻结岩层与下覆融土层的热量交换,最终导致计算结果偏大。但是,在实际的应用过程中却出现了模拟值偏小的情况,如蒙古北部地区和青藏高原的个别点(表2)。针对这种情况,可能的解释是同一土壤剖面内不同深度的土壤含水量、导热率和容重等参数存在较大的差异,将这些参数取平均值或者依照一层同性选取参数有可能拉低了整个参数取值,造成计算结果有一些偏小。

表2 基于 Stefan 方程的活动层厚度估算值小于实测值的结果统计

Table 2 The relative errors between calculated active layer thickness and measured active layer thickness

站点	纬度/N	经度/E	海拔/m	实测值/m	模拟值/m	相对误差/%	文献来源	
蒙古北部的库苏古尔	BH3			3.2	3.0	6.2	Heggem 等 <sup>[17]</sup>	
	BH4			4.0	2.9	27.5		
	BH6	—	—	—	>4.0	3.6	>10	
	BH9				4.8	4.1	14.5	
	BH10				4.2	3.6	14.2	
	BH16				4.8	1.3	72.9	
乌丽	34.00°	92.67°	4 625	2.55	2.18	14.5		
北麓河	34.82°	92.92°	4 656	2.40	2.16	10	庞强强等 <sup>[34]</sup>	
开心岭	33.96°	92.34°	4 652	>2.70	2.19	>18.9		
通天河	33.77°	92.24°	4 650	2.65	2.22	16.2		
温泉盆地	—	91.94°	4 817	3.36	3.33	0.8		
扎加藏布河	—	91.53°	4 868	3.50	2.65	24.2	徐晓明等 <sup>[35]</sup>	
扎加藏布河	—	91.62°	4 887	3.42	2.73	20.1		

冻融指数和导热系数作为 Stefan 方程两个重要输入参数,其计算的准确性和获取方法差异影响模拟结果,进而引起一定的模拟误差。冻融指数在一定程度上可指示冻融作用的深度、强度及持续时间,其变化深刻影响冻融作用下形成的冰缘地貌和寒区地质环境<sup>[72]</sup>。冻融指数计算方法包括经典日计算方法、月平均方法和年振幅方法<sup>[23]</sup>。冻融指数计算时针对温度数据缺测时间长短采用不同的插补方式,缺测 1 天,选择其前后各一天数值取平均值插补;缺测 2 天,缺测第一天选择该日前两天的数值取平均,缺测第二天选择该日后两天的数值取平均;缺测超过 2 天但不超过一个月,选择前后各一年该月数据进行插值补充<sup>[73]</sup>。此外,不同学者针对不同研究区域的冻结期和融化期开始结束时间的界

定方法不同。冻融指数不同计算方法和温度数据缺测不同插补方式得到的冻融指数有一定的差异,进而影响冻融指数的计算准确性。冻土导热系数反映了地层冻结过程中包括土中相变潜热影响的综合导热能力,直接影响冻结冷量在地层中的传递过程。多年冻土导热系数基于野外测试方法和计算模型得到。现存的适用于冻土区的导热系数计算模型多以一种或几种土壤条件为前提,或者多考虑局地因素影响。同时,多年冻土区土壤受冻融循环影响较大,多年冻土内部水热传输过程复杂,模型没有考虑未冻水含量、土骨架组成及冻土结构等对冻土导热系数影响,使得模型得到的导热系数精度不高、适用性具有局限性<sup>[74-75]</sup>。

## 4.2 没有考虑降水的影响

一般来讲,降雨增加,活动层含水量增加,土壤冻结需要释放更大的潜热,使得土壤冻结过程中的温度降低大大减小;同时,降雨减少,秋季冻结的冰含量减少,来年用于融化冰消耗的热量减少,更多的热量用于加热活动层,使得活动层融化速率增大。然而,Subin 等<sup>[76]</sup>却认为降雨会增大地表感热传递和土体融化潜热量,使得活动层和多年冻土温度升高。

降雨对活动层水热的影响比较复杂。不同区域的影响不同;同一区域不同降雨强度和降雨时长、一年中暖季降雨和冷季降雨以及一天中不同时刻的暖降雨和冷降雨均对活动层水热有影响且影响机理不同。国外有关这方面的研究仅在阿拉斯加北方森林有过。青藏高原降水较多,主要集中在5—9月,东部降水多,西部降水少<sup>[77]</sup>。降水的这种时空分布不均匀性对活动层水热影响差异较大。目前,除了北麓河地区外,整个青藏高原上有关这方面的研究至今是空白。张明礼等<sup>[78-79]</sup>在北麓河的研究认为夏季短期、高频次降雨有减少地表净辐射、增加地表蒸发潜热、降低土壤表层温度的作用。李德生等<sup>[80]</sup>在北麓河地区发现暖季的高频率、小雨量降雨对活动层具有显著的冷却效果,且凌晨2点左右的降雨产生能量变量很小,而14点左右的降雨产生的能量变量最大。Wen 等<sup>[81]</sup>通过冻土监测发现,北麓河夏季降雨入渗对流作用降低了地表温度梯度、减小土壤热通量,降雨增加减缓冻土的退化。因此,可以尝试在 Stefan 方程中加入降雨后定量分析降雨尤其是极端降雨事件对活动层融化速率的影响。

## 4.3 含水量的敏感性

土壤含水量和未冻水含量作为 Stefan 方程的重要输入项,考虑了冰水二相转换释放的潜热对融化深度的影响。当其他条件恒定,土壤含水量发生变化时,季节冻结和季节融化深度相应变化。Woo 等<sup>[56]</sup>也发现相比干容重、有机质和矿物质含量,J-L 算法对地表温度和土壤含水量更敏感,得到当地表温度升高 1℃时,最大冻结深度减小了 0.22 m,当土壤重量含水量分别增加 50% 和 150% 时最大冻结深度减小了 0.06 m 和 0.24 m。但是,在少数研究中往往没有考虑土壤含水量和未冻水含量的影响。Romanovsky 等<sup>[18]</sup>忽略含水量后模拟阿拉斯加北极海岸平原自北向南的 West Dock、Franklin 和 Franklin

Bluffs 三个点 1987—1992 年的活动层厚度,得到的最大误差分别高达 26%、3% 和 71%,存在明显高估的情况。Stefan 方程对含水量具有高度依赖性。在水分较充足的区域模拟得到的误差较小,在相对干旱的区域得到的误差较大。正如图 1 所示,模拟值与实测值的相对误差随含水量的增加而降低。这符合 Stefan 方程理论上的定义,Stefan 方程只适用于计算湖水(冰)的冻结(融化)厚度,如果用以计算土层的冻结或融化深度,则其计算结果的误差随土层含水(冰)量的减少而增大。

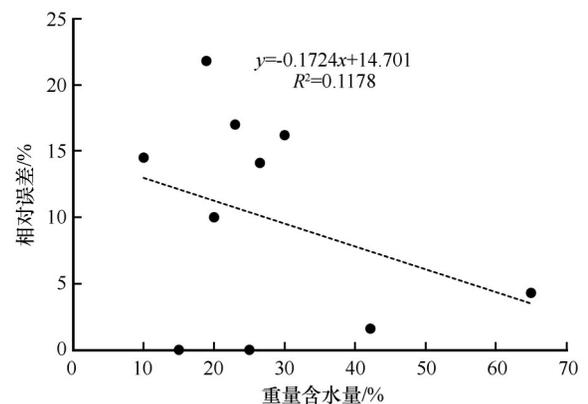


图1 青藏高原活动层厚度模拟值与实测值的相对误差与土壤含水量的关系

Fig. 1 Relationship between relative error and soil water content of permafrost on the Qinghai-Tibet Plateau

在多年冻土区活动层底部及上限附近最冷时期存在着较高的未冻水含量,这部分未冻水并没有参与实际的冻结融化过程。在计算中应该除掉这部分未冻水含量。Wilhelm 等<sup>[82]</sup>估算了南极半岛西部阿姆斯特勒岛活动层厚度,由于该区域含水量比较少(重量含水量 0~8.4%),忽略了含水量后得到的活动层厚度明显偏大。Uxa<sup>[83]</sup>对 Wilhelm 等的模拟结果做了纠正,发现该区域多年冻土中还存在 2% 的未冻水,假定这部分未冻水参与冻融过程,得到的活动层厚度更接近实测值。基于 X-G 算法不考虑未冻水得到马衔山 2010—2013 四年的活动层厚度均小于实测厚度,但实际上马衔山多年冻土区活动层下部最冷时期始终保持  $0.1 \text{ m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$  的体积未冻水。将这部分体积未冻水转换成重量未冻水并假定其不参与融化过程,得到的活动层厚度为 118 cm;而当以总的含水量为输入项开展模拟时,由于高估了冻融过程中冰水二相转化消耗的潜热,导致模拟深度减小,模拟的活动层厚度为 104 cm,明显小于未冻水不参与的情况。不同土壤质地的

未冻水含量是不相同的,同一土壤类型的未冻水含量随温度而变化。一般情况下,由于缺乏土壤水分的观测资料,尤其是未冻水含量的监测更少,很难满足冻土空间分布上的确定,在计算过程中未冻水含量常取固定值,必定使得模拟结果存在较大的误差和不准确性。

## 5 讨论与结论

针对 Stefan 方程进行的多种改进措施虽然增强了方程对影响冻融过程的因素的包容性,但改进后的方程往往限制更多,不同地区应用时要引用更多的经验性因子。事实上,由于影响冻融过程因素很多,复杂的方程并不一定会取得更好的模拟效果。如俄罗斯冻土学家 Kudryavtsev 于 1974 年提出的 Kudryavtsev 方程<sup>[84]</sup>是在冻土学中 with Stefan 方程并列的计算活动层冻融深度的重要方法。该方程既可以模拟活动层厚度,也可以模拟多年冻土顶板温度。计算中不仅考虑了潜热,而且考虑了积雪、土壤的热传导和热容量效应,输入参数较多,更接近于真实情况。过去 20 多年来,Romanovsky 方程被广泛用于北极圈活动层厚度和多年冻土顶板温度的模拟、不同气候情景模式下活动层厚度的预测<sup>[85-86]</sup>、活动层加厚引发的潜在危险评估<sup>[87-88]</sup>,以及全球变暖背景下俄罗斯北极湿地温室气体的排放评估<sup>[89]</sup>。在青藏高原地区也有多次应用,如 Pang 等<sup>[90]</sup>模拟了青藏高原活动层厚度的空间分布;Luo 等<sup>[91]</sup>得到黄河源区多年冻土顶板温度和活动层厚度的空间分布。从现有的文献来看,一般认为 Romanovsky 方程的模拟精度要好于 Stefan 方程。如 Romanovsky 等<sup>[18]</sup>、Shiklomanov 等<sup>[92]</sup>在模拟阿拉斯加北坡多年冻土活动层厚度时得到 Kudryavtsev 模型模拟精度远远大于 Stefan 方程。但也有的研究认为 Kudryavtsev 方程所需要参数太多从而导致了模拟误差。如 Yin 等<sup>[93]</sup>发现 Stefan 方程在模拟五道梁多年冻土活动层厚度时的误差(<7%)要小于 Kudryavtsev 模型(2.8%~27.4%)。从理论上讲,Kudryavtsev 方程可以看作是 Stefan 方程的一种全面改进,Romanovsky 等<sup>[18]</sup>对 Kudryavtsev 方程与 Stefan 方程之间的转换方法进行了较为详细的介绍,本文不再赘述。

实际上,多年冻土的冻融过程是土壤水分相变的过程,当水分由冰相转化为水相时,相对应的土壤热容量变小,热传导加快,从而使得冻结锋面

的位置发生变化。在较小的日时间尺度上,含水量的影响也许可以忽略,但在时间较长的年尺度上具有至关重要的作用。因此,在一些含水量较高的多年冻土区,不仅要考虑总含水量,还要考虑到未冻水含量的年变化。未冻水不仅直接影响 Stefan 方程的模拟结果,而且通过影响导热系数进而再次影响模拟结果。因此,Stefan 方程在冻土模拟中未来考虑和改进的关键是未冻水,如何通过大尺度参量来确定土壤未冻水含量的变化是一个基本而又很重要的问题,这也是目前 Stefan 方程最急需考虑和解决的重中之重。同时,多年冻土作为冰冻圈很重要的主体之一,其与其他圈层的相互作用越来越受到重视。一些学者试图在寒区陆面模式和水文模型中考虑加入多年冻土的影响,但是仅仅将多年冻土的影响作为其中一个单独的子模块。如何将多年冻土的诸多参数真正融入陆面模型和水文模型中是目前亟待解决的问题。

Stefan 方程参数少、形式简单、模拟效果可靠,是活动层厚度计算中运用最广泛、使用最方便的公式之一。但在国内的应用相对较少,现有的研究大多只是将此公式简单应用于模拟多年冻土活动层厚度的空间分布状况。随着青藏高原地区多年冻土变化研究的深入,Stefan 方程的应用必将日趋广泛。本文简要介绍了 Stefan 方程的推导背景和在冻土研究中的一些改进,希望起到抛砖引玉的作用,未来相关学者可在此基础上,对这一历史悠久的冻融过程模拟计算方法开展更深入地研究,使其在青藏高原多年冻土研究中得到更广泛地应用。

## 参考文献(References):

- [1] Qin Dahe. Glossary of Cryosphere Science [M]. Beijing: China Meteorological Press, 2014: 68-69. [秦大河. 冰冻圈科学词典[M]. 北京: 气象出版社, 2014: 68-69.]
- [2] Liu Guangyue, Zhao Lin, Xie Changwei, et al. Variation characteristics and impact factors of the depth of zero annual amplitude of ground temperature in permafrost regions on the Tibetan Plateau [J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2016, 38(5): 1189-1200. [刘广岳, 赵林, 谢昌卫, 等. 青藏高原多年冻土区地温年变化深度的变化规律及影响因素[J]. 冰川冻土, 2016, 38(5): 1189-1200.]
- [3] Zou D F, Zhao L, Sheng Y P, et al. A new map of the permafrost distribution on the Tibetan Plateau [J]. The Cryosphere, 2017, 11: 2527-2542.
- [4] Qin Y H, Wu T H, Zhao L, et al. Numerical modeling of the active layer thickness and permafrost thermal state across Qinghai-Tibetan Plateau [J]. Journal of Geophysical Research: Atmosphere, 2017, 122: 11604-11620.
- [5] Peng X Q, Zhang T J, Frauenfeld O W, et al. Spatiotemporal Changes in Active Layer Thickness under Contemporary and

- Projected Climate in the Northern Hemisphere [J]. *Journal of Climate*, 2018, 31(1): 251-266.
- [6] Cheng Guodong, Zhao Lin, Li Ren, et al. Characteristic, changes and impacts of permafrost on Qinghai-Tibet Plateau [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2019, 64(27): 2783-2795. [程国栋, 赵林, 李韧, 等. 青藏高原多年冻土特征、变化及影响 [J]. *科学通报*, 2019, 64(27): 2783-2795.]
- [7] Sun Z, Zhao L, Hu G J, et al. Modeling permafrost changes on the Qinghai-Tibetan Plateau from 1966 to 2100: a case study from two boreholes along the Qinghai-Tibet engineering corridor [J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2020, 31: 156-171.
- [8] Zhao L, Zou D F, Hu G J, et al. Changing climate and the permafrost environment on the Qinghai-Tibet (Xizang) Plateau [J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2020, 1-10.
- [9] Wang Kang, Zhang Tingjun, Mu Cuicui, et al. From the third pole to the Arctic: changes and impacts of the climate and cryosphere [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2020, 42(1): 104-123. [王康, 张廷军, 牟翠翠, 等. 从第三极到北极: 气候与冰冻圈变化及其影响 [J]. *冰川冻土*, 2020, 42(1): 104-123.]
- [10] Riseborough D, Shiklomanov N, Etzelmuller B, et al. Recent advances in permafrost modelling [J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2008, 19: 137-156.
- [11] Wang Chenghai, Jin Shaunglong, Wu Zhongyuan, et al. Evaluation and application of the estimation method of frozen (thawing) depth over China [J]. *Advances In Earth Science*, 2009, 24(2): 132-140. [王澄海, 靳双龙, 吴忠元, 等. 估算冻结(融化)深度方法的比较及在中国地区的修正和应用 [J]. *地球科学进展*, 2009, 24(2): 132-140.]
- [12] Stefan J. Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere uiber die Eisbildung im Polarmeere [J]. *Annal. Phy. Chem.*, 1891, 42: 269-286.
- [13] Berggren W P. Prediction of temperature distribution in frozen soil [J]. *Trans. Am. Geophys.* 1943, 3: 71-77.
- [14] USSR Academy of Sciences. Branch Siberian. Permafrost Institute. General geocryology [M]. Guo Dongxin, Liu Tieliang, Zhang Weixin, et al. trans. Beijing: Science Press, 1988. [苏联科学院西伯利亚分院冻土研究所. 普通冻土学 [M]. 郭东信, 刘铁良, 张维信, 等译. 北京: 科学出版社, 1988.]
- [15] Holden J T, Jone R H, Dudek J M. Heat and mass flow association with a freezing front [J]. *Engineering Geology*, 1981, 18: 153-164.
- [16] Hong Tao, Liang Sihai, Sun yu, et al. Impact analysis of permafrost thermal conductivity and its application of simulating active layer thickness in the source area of the Yellow River [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2013, 35(4): 824-833. [洪涛, 梁四海, 孙禹, 等. 黄河源区多年冻土热传导系数影响因素分析及其在活动层厚度模拟中的应用 [J]. *冰川冻土*, 2013, 35(4): 824-833.]
- [17] Heggem E S F, Etzelmuller B, Anarmaa S, et al. Spatial Distribution of Ground Surface Temperatures and Active Layer Depths in the Hovsgol Area, Northern Mongolia [J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2006, 17: 357-369.
- [18] Romanovsky V E, Osterkamp T E. Thawing of the active layer on the coastal plain of the Alaskan Arctic [J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 1997, 8(1): 1-22.
- [19] Liu Tieliang. Overview of formula of simulating thawing or freezing depth for foreign [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 1983, 5(2): 85-94. [刘铁良. 国外计算冻结或融化深度公式概述 [J]. *冰川冻土*, 1983, 5(2): 85-94.]
- [20] Carson H. Calculation of depth of thaw in frozen ground [J]. *Highway Research Board Special Report*, 1952, 2: 19-223.
- [21] Li Shuxun, Wu Tonghua. The relationship between air temperature and ground temperature in the Tibetan Plateau [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2005, 27(5): 627-631. [李述训, 吴通华. 青藏高原地气温度之间的关系 [J]. *冰川冻土*, 2005, 27(5): 627-631.]
- [22] Jiang Guanli, Wu Qingbai, Zhang Zhongqiong. Study on the differences of thermal-moisture dynamics in the active layer of permafrost in different alpine ecosystems on the Tibetan Plateau [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2018, 40(1): 7-17. [蒋观利, 吴青柏, 张中琼. 青藏高原不同高寒生态系统类型下多年冻土活动层水热过程差异研究 [J]. *冰川冻土*, 2018, 40(1): 7-17.]
- [23] Zhao Hongyan, Jiang Hao, Wang Keli, et al. The surface thawing-freezing indexes along the Qinghai-Tibet Railway: analysis and calculation [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2008, 30(4): 617-623. [赵红岩, 江灏, 王可丽, 等. 青藏铁路沿线地表融冻指数的计算分析 [J]. *冰川冻土*, 2008, 30(4): 617-623.]
- [24] Wu Qingbai. Study on change of frozen soil environment and engineering suitability under human activities [D]. Beijing: Graduate University of Chinese Academy of Sciences, 2000: 129-131. [吴青柏. 人为活动下冻土环境变化和工程适应性研究 [D]. 北京: 中国科学院研究生院, 2000: 129-131.]
- [25] Klene A E, Nelson F E, Shiklomanov N I, et al. Interannual variability of winter  $n$ -factors in the Kuparuk River Basin, Alaska [C]//Ninth International Conference on Permafrost. 2008: 953-958.
- [26] Klene A E, Nelson F E, Shiklomanov N I, et al. The  $n$ -factor in natural landscape: Variability of air and soil-surface temperature, Kuparuk River Basin, Alaska, U. S. A [J]. *Arctic Antarctic and Alpine Research*, 2001, 3(2): 140-148.
- [27] Klene A E. The  $n$ -factor in natural landscape: relations between air and surface temperatures in the Kuparuk River Basin, northern Alaska [J]. *Publications in Climatology*, 2000, 53: 1-85.
- [28] District T. Comprehensive report: investigation of military construction in Arctic and Subarctic regions, 1945-1948: Appendix iii, de [R]. *Technical Report-Arctic Construction and Frost*, 1950.
- [29] Burn C R. The response (1958-1997) of permafrost and near-surface ground temperatures to forest fire, Takhini River valley, southern Yukon Territory [J]. *Revue Canadienne Des Sciences De La Terre*, 1998, 35(2): 184-199.
- [30] Taylor A E. Field measurements of  $n$ -factors for natural forest areas, Mackenzie Valley, Northwest Territories [J]. *Interior Plains and Arctic Canada*, 1995: 89-98.
- [31] Lunardini V J. Theory of  $N$ -factors and correlation of data [C]//Proceedings of the Third International Conference on Permafrost, National Council of Canada: Ottawa; 1978, 1: 40-46.
- [32] Shur Y L, Slavin Borovskiy V B.  $N$ -factor maps of Russian permafrost region [C]//Proceedings of the Sixth International Conference on Permafrost. Wushan, Guangzhou, China: South China University of Technology Press, 1993, 2: 564-568.
- [33] Juliussen H, Humlum O. Towards a TTOP ground temperature model for mountainous terrain in central-eastern Norway [J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2007, 18: 161-184.
- [34] Pang Qiangqiang, Li Shuxun, Wu Tonghua, et al. Simulated distribution of the active layer thickness on the Qinghai Tibet Plateau [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2006, 28

- (3): 390-395. [庞强强, 李述训, 吴通华, 等. 青藏高原冻土区活动层厚度分布模拟[J]. 冰川冻土, 2006, 28(3): 390-395.]
- [35] Xu Xiaoming, Wu Qingbai, Zhang Zhongqiong. Responses of active layer thickness on the Qinghai-Tibet Plateau to climate change[J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2017, 39(1): 1-8. [徐晓明, 吴青柏, 张中琼. 青藏高原多年冻土活动层厚度对气候变化的响应[J]. 冰川冻土, 2017, 39(1): 1-8.]
- [36] Zhang Zhongqiong, Wu Qingbai. Predicting changes of active layer thickness on the Qinghai-Tibet Plateau as climate warming[J]. 2012, 34(3): 505-511. [张中琼, 吴青柏. 气候变化情景下青藏高原多年冻土活动层厚度变化预测[J]. 冰川冻土, 2012, 34(3): 505-511.]
- [37] Klene A E, Nelson F E, Shiklomanov N I. The n - factor as a tool in geocryological mapping: seasonal thaw in the Kuparuk River Basin, Alaska[J]. *Physical Geography*, 2001, 22(6): 449-466.
- [38] Zhang T, Frauenfeld O W, Serreze M C, et al. Spatial and temporal variability in active layer thickness over the Russian Arctic drainage basin[J]. *Journal of Geophysical Research Atmospheres*, 2005, 110: 1-14.
- [39] Harlan R L, Nixon J F. Ground thermal regime [J]. *Geotechnical Engineering for Cold Regions*, 1978, 103-163.
- [40] Hinkel K M, Nicholas J R J. Active layer thaw rate at a Boreal forest site in Central Alaska, U. S. A[J]. *Arctic and Alpine Research*, 1995, 27(1): 72-80.
- [41] Peng X Q, Zhang T J, Cao B, et al. Changes in freezing-thawing index and soil freeze depth over the Heihe River Basin, Western China [J]. *Arctic Antarctic and Alpine Research*, 2016, 48(1): 161-176.
- [42] Shiklomanov N I, Nelson F E. Active-layer mapping at regional scales: a 13-years spatial time series for the Kuparuk region, north-central Alaska[J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2002, 13(3): 219-230.
- [43] Shiklomanov N I, Nelson F E. Statistical representation of landscape-specific active-layer variability [C]// Phillips M, Springman S M, Arenson L U. *Proceedings of the Eighth International Conference on Permafrost*, Zurich, Switzerland. Lisse: A. A. Balkema, 2003: 1039-1044.
- [44] Brown J, Hinkel K M, Nelson F E. The Circumpolar Active Layer Monitoring (CALM) program: research designs and initial results[J]. *Polar Geography*, 2000, 24(3): 166-258.
- [45] Hinkel K M, Nelson F E. Spatial and temporal patterns of active layer thickness at Circumpolar Active Layer Monitoring (CALM) sites in northern Alaska, 1995-2000 [J]. *Journal of Geophysical Research Atmosphere*, 2003, 108(D): 8168.
- [46] Nelson F E, Shiklomanov N I, Mueller G R, et al. Estimating active layer thickness over a large region: Kuparuk River Basin, Alaska, USA [J]. *Arctic and Alpine Research*, 1997, 29(4): 367-378.
- [47] Jumikis A R. *Thermal geotechnics*[M]. New Brunswick: Rutgers University Press, 1997: 200-204.
- [48] Lunardini V J. *Heat transfer in cold climates*[M]. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1981.
- [49] Kersten M S. Frost penetration: relationship to air temperature and other factors [J]. *Highway Research Board Bull*, 1959, 225: 45-80.
- [50] Nixon J F, McRoberts E C. A study of some factors affecting the thawing of frozen soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1973, 10: 439-452.
- [51] Xu Xiaozu, Wang Jiacheng, Zhang Lixin. *Physics of frozen soil*[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2010: 75-82. [徐教祖, 王家澄, 张立新. 冻土物理学[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2010: 75-82.]
- [52] Xie C W, William A G. A simple thaw-freeze algorithm for a multi-layered soil using the stefan equation[J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2013, 24: 252-260.
- [53] Woo M K, Mollinga M, Sharon S L. Climate warming and active layer thaw in the boreal and tundra environments of the Mackenzie Valley [J]. *Canadian Journal of Earth Sciences*, 2007, 44(6): 733-743.
- [54] Woo M K, Mollinga M, Smith S L. Modeling maximum active layer thaw in boreal and Tundra environments using limited data [M]//Cold Region Atmospheric and Hydrologic Studies. The Mackenzie GEWEX Experience. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [55] Woo M K, Mollinga M, Smith S L. Simulating active layer thaw in a boreal environment[J]. *Geographie Physique Et Quaternaire*, 2006, 60(1): 9.
- [56] Woo M K, Arain M A, Mollinga M, et al. A two-directional freeze and thaw algorithm for hydrologic and land surface modeling [J]. *Geophysical Research Letters*, 2004, 31(12): 261-268.
- [57] Liu Wenhui, Xie Changwei, Zhao Lin, et al. Simulating the active layer depth and analyzing its influence factors in permafrost of the Mahan Mountain, Lanzhou[J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2015, 37(6): 1443-1452. [刘文惠, 谢昌卫, 赵林, 等. 兰州马衔山多年冻土活动层厚度估算及影响因素分析[J]. 冰川冻土, 2015, 37(6): 1443-1452.]
- [58] Kurylyk B L. Discussion of 'A simple thaw-freeze algorithm for a multi-layered soil using the Stefan equation' by Xie and Gough (2013) [J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2015, 26(2): 200-206.
- [59] Xie C W, Gough W A. Comments on thaw-freeze algorithms for multilayered soil using the Stefan equation[J]. *Sciences in Cold and Arid Regions*, 2017, 9(6): 525-533.
- [60] Cherkauer K A, Lettenmaier D P. Simulation of spatial variability in snow and frozen soil[J]. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 2003, 108(D22): 1-10.
- [61] Luo L F, Robock A, Vinnikov KY, et al. Effects of frozen soil on soil temperature, spring infiltration, and runoff: results from the PILPS 2(d) experiment at Valdai, Russia [J]. *Journal of Hydrometeorology*, 2003, 4(2): 334-351.
- [62] Liao C, Zhuang Q L. Quantifying the role of permafrost distribution in groundwater and surface water interactions using a three-dimensional hydrological model[J]. *Arctic Antarctic and Alpine Research*, 2017, 49: 81-100.
- [63] Zhang X, Sun S F, Xue Y K. Development and testing of a frozen soil parameterization for cold region studies[J]. *Journal of Hydrometeorology*, 2007, 8: 690-701.
- [64] Pomeroy J W, Gray D M, Brown T, et al. The cold regions hydrological model: a platform for basing process representation and model structure on physical evidence[J]. *Hydrological Processes*, 2007, 21(19): 2650-2667.
- [65] Zhang Wei. Simulating alpine soil thermal regime and cold regions hydrological processes using modular modeling method [D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2013. [张伟. 基于模块化建模方法的高寒土壤热状况及水文过程模拟[D]. 兰州: 兰州大学, 2013.]
- [66] Zhou J, Pomeroy J W, Zhang W, et al. Simulating cold regions hydrological processes using a modular model in the west of China[J]. *Journal of Hydrology*, 2014, 509: 13-24.

- [67] Han Li, Song Kechao, Zhang Wenjiang, et al. Temporal and spatial variations of hydrological factors in the source area of the Yangtze River and its responses to climate change[J]. *Journal of Mountain Science*, 2017(2): 129-141. [韩丽, 宋克超, 张文江, 等. 长江源头流域水文要素时空变化及对气候因子的响应[J]. *山地学报*, 2017(2): 129-141.]
- [68] Stendel M, Christensen J H. Impact of global warming on permafrost conditions in a coupled GCM [J]. *Geophysical Research Letters*, 2002, 29(13): 1632-1641.
- [69] Li X, Koike T. Frozen soil parameterization in SiB2 and its validation with GAME-Tibet observations [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2003, 36: 165-182.
- [70] Yi S H, Arain M A, Woo M K. Modifications of a land surface scheme for improved simulation of ground freeze-thaw in northern environments [J]. *Geophysical Research Letters*, 2006, 33: 1-5.
- [71] Fox J D. Incorporating freeze-thaw calculations into a water balance model [J]. *Water Resources Research*, 1992, 28 (9): 2229-2244.
- [72] Cao Bin, Zhang Tingjun, Peng Xiaoqing, et al. Spatial variability of freezing-thawing index over the Heihe River Basin [J]. *Advances in Earth Science*, 2015, 30(3): 357-366. [曹斌, 张廷军, 彭小清, 等. 黑河流域年冻融指数及其时空变化特征分析[J]. *地球科学进展*, 2015, 30(3): 357-366.]
- [73] Liu Lei, Luo Dongliang. Spatial and temporal characteristics of air/ground freezing and thawing index in the middle and lower reaches of the Yarlung Zangbo River during 1977-2017 [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2020, 42(3): 812-822. [刘磊, 罗栋梁. 1977-2017年雅江流域中下游大气/地面冻融指数时空变化特征[J]. *冰川冻土*, 2020, 42(3): 812-822.]
- [74] Du Yizhen, Li Ren, Wu Tonghua, et al. Study of soil thermal conductivity: research status and advances [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2015, 37(4): 1067-1074. [杜宜臻, 李韧, 吴通华, 等. 土壤热导率的研究现状及其进展[J]. *冰川冻土*, 2015, 37(4): 1067-1074.]
- [75] He Ruixia, Jin Huijun, Zhao Shuping, et al. Review of status and progress of the study in thermal conductivity of frozen soil [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2018, 40(1): 116-126. [何瑞霞, 金会军, 赵淑萍, 等. 冻土导热系数研究现状及进展[J]. *冰川冻土*, 2018, 40(1): 116-126.]
- [76] Subin Z M, Kven C D, Riley W J, et al. Effects of soil moisture on the responses of soil temperatures to climate change in cold regions [J]. *Journal of Climate*, 2013, 26(10): 3139-3158.
- [77] Li Xiaoying, Yao Zhengyi, Xiao Jianhua, et al. Analysis of the spatial-temporal variations characteristics of precipitation over Tibetan Plateau from 1961 through 2010 [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2016, 38(5): 1233-1240. [李晓英, 姚正毅, 肖建华, 等. 1961—2010年青藏高原降水时空变化特征分析[J]. *冰川冻土*, 2016, 38(5): 1233-1240.]
- [78] Zhang Mingli, Wen Zhi, Xue Ke, et al. The effects of precipitation on thermal-moisture dynamics of active layer at Beiluhe permafrost region [J]. *Journal of Arid Land Resources and Environment*, 2016, 30(4): 159-164. [张明礼, 温智, 薛珂, 等. 降水对北麓河地区多年冻土活动层水热影响分析[J]. *干旱区资源与环境*, 2016, 30(4): 159-164.]
- [79] Zhang Mingli, Wen Zhi, Xue Ke. Soil moisture-heat migration characteristics within the permafrost active layer in Beiluhe [J]. *Journal of Arid Land Resources and Environment*, 2015, 29(9): 176-181. [张明礼, 温智, 薛珂. 北麓河多年冻土活动层水热迁移规律分析[J]. *干旱区资源与环境*, 2015, 29(9): 176-181.]
- [80] Li Desheng, Wen Zhi, Zhang Mingli, et al. The quantitative analysis of the hydro-thermal dynamic of permafrost active layer effected by precipitation [J]. *Journal of Arid Land Resources and Environment*, 2017, 31(7): 108-114. [李德生, 温智, 张明礼, 等. 降水对多年冻土活动层水热影响定量分析[J]. *干旱区资源与环境*, 2017, 31(7): 108-114.]
- [81] Wen Z, Zhang M L, Ma W, et al. Thermal-moisture dynamics of embankments with asphalt pavement in permafrost regions of central Tibetan Plateau [J]. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2014, 19(4): 1-13.
- [82] Wilhelm K R, Bockheim J G, Kung S. Active layer thickness prediction on the Western Antarctic Peninsula [J]. *Permafrost and Periglacial Process*, 2015, 26: 188-199.
- [83] Uxa T. Discussion on 'active layer thickness prediction on the Western Antarctic Peninsula' by Wilhelm et al. (2015) [J]. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2017, 28: 493-498.
- [84] Kudryavtsev V A, Garagulya L S, Yeva K A K, et al. Fundamentals of frost forecasting in geological engineering investigations, Nauka, Moscow [J]. Draft translation 606. CRREL, Hanover, NH. 1977: 489.
- [85] Anisimov O A, Shiklomanov N I, Nelson F E. Effects of global warming on permafrost and active-layer thickness: results from transient general circulation models [J]. *Global and Planetary Change*, 1997, 15: 61-77.
- [86] Anisimov O A, Reneva S A. Permafrost and changing climate: the Russian perspective [J]. *Ambio*, 2006, 35: 169-175.
- [87] Nelson F E, Anisimov O A, Shiklomanov N I. Climate change and hazard potential in northern permafrost regions [J]. *Nature*, 2001, 410: 889-890.
- [88] Nelson F E, Anisimov O A, Shiklomanov N I. Climate change and hazard zonation in the circum-arctic permafrost regions [J]. *Natural Hazards*, 2002, 26(3): 203-225.
- [89] Anisimov O A, Lavrov S A, Reneva S A. Emission of methane from the Russian frozen wetlands under the conditions of the changing climate [J]. *Problems of Ecological Modeling and Monitoring of Ecosystems*, 2005: 124-142.
- [90] Pang Q Q, Cheng G D, Li S X, et al. Active layer thickness calculation over the Qinghai-Tibet Plateau [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2009, 57: 23-28.
- [91] Luo D L, Jin H J, Marchenko S, et al. Distribution and changes of active layer thickness (ALT) and soil temperature (TTOP) in the source area of the Yellow River using the GIPL model [J]. *Science China Earth Sciences*, 2014, 57(8): 1834-1845.
- [92] Shiklomanov N I, Nelson F E. Analytic representation of the active layer thickness field, Kuparuk River Basin, Alaska [J]. *Ecological Modeling*, 1999, 123(2/3): 105-125.
- [93] Yin G A, Niu F J, Lin Z J, et al. Performance comparison of permafrost models in Wudaoliang Basin, Qinghai-Tibet Plateau, China [J]. *Journal of Mountain Science*, 2016, 13(7): 1162-1173.

## Application of Stefan equation on simulating freezing-thawing process of permafrost

LIU Wenhui<sup>1</sup>, XIE Changwei<sup>2</sup>, LIU Hairui<sup>3</sup>, PANG Qiangqiang<sup>2</sup>, WANG Wu<sup>2</sup>,  
LIU Guangyue<sup>2</sup>, YANG Yukun<sup>1</sup>, WANG Ming<sup>1</sup>, ZHANG Qi<sup>1</sup>

(1. Department of Geological Engineering, Qinghai University, Xining 810016, China; 2. Cryosphere Research Station on the Qinghai-Tibet Plateau, State Key Laboratory of Cryospheric Science, Northwest Institute of Eco-Environment and Resources, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China; 3. College of Eco-Environmental Engineering, Qinghai University, Xining 810016, China)

**Abstract:** The interaction between permafrost and atmosphere is mainly accomplished through the thermal and hydro-dynamics in the active layer. In background of climate change, the simulation of freezing-thawing process, active layer thickness map and variation-prediction are the basis of studying ecological environment, hydrology, engineering and carbon cycle of permafrost regions. For this paper, we summarize the application of different revised Stefan equations in simulating freezing-thawing process and active layer thickness, as well as its significant application in multi-layer soil, and then discuss the possible questions in its implication. Stefan equation revealed the linkage between change of surface temperature (or air temperature) and freezing-thawing process of ice (or soil) in a simple form, which significantly simplified the analysis and calculation of freezing-thawing process of soil. Stefan equation, with less parameters, simple form and reliable simulation results, is widely used to simulate freezing-thawing process. Also, more and more studies focusing on coupled it to climate model, land surface model and hydrological model. Stefan equation was originally proposed in the study of lake ice formation in the Arctic region and later widely used in permafrost. It was improved by considering soil water content, difference between ground and air temperature on different underlying, topography, precipitation and other factors, and even was applied to simulate freezing-thawing process of heterogeneous soil. However, on the Qinghai-Tibet Plateau, Stefan equation is widely used for simulating spatial distribution of active layer thickness of permafrost for homogeneous soil but rarely applied to heterogeneous soils. Therefore, it is necessary to further study that Stefan equation simulated freezing-thawing process for multilayer soil in the future, which will provide a basic method for accurately studying the response of permafrost to climate change.

**Key words:** Stefan equation; freezing-thawing process; active layer thickness; water content

(责任编辑: 吴晓东)